数理解析研究所講究録
588巻 1986年 136-148

$V^{(B)}$ の Banach 空間論とその応用

名大教養　小澤正直 (Masanao Ozawa)

§1．序論

最近，Scott-Solovay の Boole 代数値集合論の解析学への系統的な応用が，竹内 [14-19]，西村 [4-5]，Jech [3]，小澤 [6-12] などによりなされ，強制法を中心とする集合論の成果が解析学における全く新しくかつ強力な手段を提供しつつある．本稿では，Boole 代数値集合論における Banach 空間論を調べることにより Banach 空間論の定理から可換 AW^*-環上の加群の定理を導く移行原理を確立し，それを von Neumann 環や AW^*-環の加群構造に関するいくつかの問題を解くことに応用しよう．

§2．可換 AW^*-環上の Banach 加群

初めに，Banach 加群の用語をいくつか用意しておく必要がある．Z を可換 AW^*-環とし，そのノルムを $\|\cdot\|_\infty$ で表し，Z の射影元のなす完備 Boole 代数を B で表す．ノルム $\|\cdot\|$ をもつ（単位的） Z-加群 X は $\|ax\| \leq \|a\|_\infty \|x\|$ がすべての $a \in Z$, $x \in X$ について成立するとき，ノルム Z-加群と呼ばれ，それが Banach 空間になるとき Banach Z-加群と呼ばれる．明らかに，Z を中心の単位的部分環として含む C^*-環は Banach Z-加群である．

X, Y をノルム Z-加群とする．X から Y への有界 Z-線型写像のなす空間を $\mathrm{Hom}_Z(X,Y)$ と書く．$\mathrm{Hom}_Z(X,Z)$ を $X^\#$ で表し，X の Z-共役加群と呼び，その元を Z-汎関数と呼ぶ．X から Y の上への同距

離 Z-線型写像が存在するとき，X と Y は同距離同型であると言い，X $\simeq$ Y と書く．

Z-加群 X から Z への関数 $\|\cdot\|_Z$: X → Z は，次の条件を充たすとき Z-値ノルムと呼ばれる：任意の x, y ∈ X, a ∈ Z に対して，

1) $\|x+y\|_Z \leqq \|x\|_Z + \|y\|_Z$,
2) $\|ax\|_Z = |a|\,\|x\|_Z$,
3) $\|x\|_Z \geqq 0$, かつ X = 0 のときに限り $\|x\|_Z = 0$.

Z-値ノルムをもつ Z-加群を Z-ノルム Z-加群と呼ぶ． Z-ノルム Z-加群は $\|x\| = \|\,\|x\|_Z\|_\infty$ という関係で定義されるスカラー値のノルムをもつ．スカラー値のノルムに関して Banach 空間である Z-ノルム Z-加群を Z-Banach Z-加群と呼ぶ．Z を中心の単位的部分環として含む C*-環は，

$$\|x\|_Z = \inf\{a \in Z \mid x^*x \leqq a^2,\ a \geqq 0\}$$

で定義される Z-値ノルムによって Z-Banach Z-加群になる．

B の元の族 $\{b_i\}$ は， $\sup_i b_i = 1$ で $i \neq j$ ならば $b_i b_j = 0$ となるとき単位の分解と呼ばれる．Z-ノルム Z-加群は，B の任意の単位の分解 $\{b_i\}$ と X の任意の有界な族 $\{x_i\}$ に対して $b_i x = b_i x_i$ を充たす X の元 x が常に存在するとき， Kaplansky Z-加群と呼ばれる． 更に，それが Banach Z-加群でもあるとき Kaplansky-Banach Z-加群と呼ばれる． Z を中心の単位的部分環として含む AW*-環は，Kaplansky-Banach Z-加群になる．二つの Z-ノルム Z-加群 X, Y は，X から Y の上への Z-ノルムを保つ Z-線型写像が存在するとき，Z-同

距離同型であると言われるが，そのためには両者が同距離同型であれば十分である．

§3．Boole 代数値集合論内 Banach 空間論

$V^{(B)}$ を完備 Boole 代数 B に対する Scott-Solovay の Boole 代数値普遍類とする．構造 $\langle X,+,\cdot,\|\cdot\|_B\rangle$ を $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間とし，その有界断面集合 $X^\wedge$ を次のように定義する．

$$X^\wedge = \{u \in V^{(B)} \mid [\![u \in X]\!] = 1 \text{ and } (\exists K \in R)\ [\![\|u\|_B \leq K^\vee]\!] = 1\}.$$

さて，$V^{(B)}$ 内複素数体 C_B の有界断面集合はその自然な算法によって，Ω を B の Stone 表現空間とすると，Ω 上の複素数値連続関数のなす可換 AW^*-環 $C(\Omega)$ と同型になることが知られている [8]. 以下，B に対して一意に定まるこの可換 AW^*-環 $C(\Omega)$ を Z で表すことにする．このことから，一般の $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間における線型空間の構造が有界断面集合においては，Z 上の加群の構造を引き起こすことが予想される．$V^{(B)}$ 内ノルム線型空間 X の有界断面加群 $\langle X^\wedge,+,\cdot,\|\cdot\|_Z\rangle$ を次のように定義する．

1) $x, y \in X^\wedge$ の和 u を $[\![u = x + y]\!] = 1$ となる ($V^{(B)}$ で)唯一の元とし，それを再び $x + y$ と書く．

2) $a \in Z$ と $x \in X^\wedge$ の積 u を $[\![u = a\cdot u]\!] = 1$ となる ($V^{(B)}$ で)唯一の元とし，それを再び $a\cdot x$ と書く．

3) すべての $x \in X^\wedge$ について，$\|x\|_Z = \|x\|_B$.

さて，有界断面加群の構造について，次の定理がなりたつ．

定理3.1. $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間 X の有界断面加群 $X^\wedge$ は Kaplansky Z-加群であり，更に，$X^\wedge$ が Kaplansky-Banach Z-加群になるための必要十分条件は X が $V^{(B)}$ 内 Banach 空間であることである．

X, Y を二つの $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間とする．$V^{(B)}$ 内有界線型写像全体のなす $V^{(B)}$ 内 Banach 空間 $L(X,Y)_B$ の有界断面加群 $L(X,Y)^\wedge$ を考えよう．$T \in L(X,Y)^\wedge$ とする．T の $V^{(B)}$ 内作用素ノルムを $\|T\|_B$ で表す．$X^{(B)}$, $Y^{(B)}$ を X, Y の断面集合として（即ち，$X^{(B)} = \{u \in V(b) \mid [\![u \in X]\!] = 1\}$ 等），$T^{(B)}$ を T によって定まる外延的写像 $T^{(B)}: X^{(B)} \to Y^{(B)}$ とする（即ち，$T^{(B)} = \{\langle x,y\rangle \in X^{(B)} \times Y^{(B)} \mid [\![T(x) = y]\!] = 1\}$）．更に，$T^\wedge$ を $T^{(B)}$ の $X^\wedge$ への制限とする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理3.2. X, Y を $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間とする．任意の $T \in L(X,Y)^\wedge$ について $T^\wedge$ は $X^\wedge$ から $Y^\wedge$ への有界 Z-線型写像である．対応 $T \to T^\wedge$ は次の条件を充たす $L(X.Y)^\wedge$ と $\mathrm{Hom}_Z(X^\wedge,Y^\wedge)$ の間の一対一対応である：

1) すべての T, $S \in L(X,Y)^\wedge$, a, $b \in Z$ 及び $x \in X^\wedge$ について，$(aT + bS)^\wedge(x) = aT^\wedge(x) + bS^\wedge(x)$.

2) すべての $T \in L(X,Y)^\wedge$ について，$\|T\|_B = \|T^\wedge\|_Z$.

更に，任意の三つの $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間 X, Y, W 及び $S \in L(X,Y)^\wedge$, $T \in L(Y,W)^\wedge$, $x \in X^\wedge$ について，$(TS)^\wedge(x) = T^\wedge S^\wedge(x)$ が成り立つ．

$V^{(B)}$ 内ノルム線型空間と $V^{(B)}$ 内有界線型写像 T で $\|T\|_B \in$ Z を充たすもの全体からなる圏を $\mathrm{Norm}^{(B)}{}_{\infty}$ で表す．従って，この圏の hom 集合関手は $L(\cdot,\cdot)\hat{}$ である．また，Kaplansky Z-加群と有界 Z-線型写像全体からなる圏を Z-Kaplansky で表す．定理3.1 と定理3.2 から，対応 $X \to X\hat{}$，$T \to T\hat{}$ によって $\mathrm{Norm}^{(B)}{}_{\infty}$ から Z-Kaplansky への関手が構成されたことが判る．この関手を有界断面関手と呼ぼう．次に，この関手の共役関手を構成しよう．そのことにより，この二つの圏が同値であることが示されるであろう．

まず，Z-ノルム Z-加群から $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間の構成に関して次の定理がなりたつ．

定理3.3. $\langle X,+,\cdot,\|\cdot\|_Z\rangle$ を Z-ノルム Z-加群とする．任意の $x \in X$，に対して，$x^{\sim} \in V^{(B)}$ を次の関係で定義する：

$$x^{\sim} = \{\langle y^{\vee}, [\![\, \|x - y\|_Z = 0]\!] = 1\rangle \mid y \in X\}.$$

このとき，すべての $x \in X$ について $[\![\, x^{\sim} \subseteq X^{\vee}]\!] = 1$ であり，対応 $x \to x^{\sim}$ は，$x = y$ ならば，そのときに限り $[\![\, x^{\sim} = y^{\sim}]\!] = 1$ であるという意味で一対一である．$X^{\sim} \in V^{(B)}$ を次の関係で定義する：

$$X^{\sim} = \{x^{\sim} \mid x \in X\} \times \{1\}.$$

このとき，$X^{\sim}$ 上の $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間の構造で次の条件を充たすものが一意に存在する：任意の $x, y \in X$ 及び $a \in Z$ について，

$$[\![\, x^{\sim} + y^{\sim} = (x + y^{\sim})]\!] = 1,\ [\![\, a^{\sim}\cdot x^{\sim} = (a\cdot x)^{\sim}]\!] = 1 \text{ かつ}$$

$[\![\ \|x^{\sim}\|_B = \|x\|_Z]\!] = 1.$

定理3.3で構成された $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間を X の $V^{(B)}$ 内埋蔵とよぼう．対応 $x \to x^{\sim}$ は X から $X^{\sim}$ の断面集合 $X^{\sim(B)}$ への単射であるが，これが $X^{\sim\wedge}$ への全射になるための条件が次の定理で示される．

定理3.4. X を Z-ノルム Z-加群，$X^{\sim}$ をその $V^{(B)}$ 内埋蔵とすると，任意の $x \in X$ に対する関係 $[\![J_X(x) = x^{\sim}]\!] = 1$ により，X から $X^{\sim\wedge}$ への Z-線型 Z-同距離写像 J_X が定まる．更に，J_X が全射になるための必要十分条件は X が Kaplansky Z-加群であることである．

J_X を X の $V^{(B)}$ 内埋蔵写像と呼ぼう．$V^{(B)}$ 内埋蔵の普遍性が次の定理で示される．

定理3.5. X を Z-ノルム Z-加群，Y を $V^{(B)}$ 内ノルム線型空間とする．任意の $T \in Hom_Z(X,Y^{\wedge})$ に対応して，$T = S^{\wedge} \circ J_X$ を充たす $S \in L(X^{\sim},Y)^{\wedge}$ が一意に存在する．

次の定理により，$V^{(B)}$ 内埋蔵が関手になることが示される．

定理3.6. X, Y を二つの Z-ノルム Z-加群とし，$T \in Hom_Z(X,Y)$ とする． このとき，次の条件を充たす $T^{\sim} \in L(X^{\sim},Y^{\sim})$ が一意に存在する：任意の $x \in X$ について $[\![T^{\sim}(x^{\sim}) = (Tx)^{\sim}]\!] = 1$，かつ $\|T^{\sim}\|_B = \|T\|_Z$.

定理3.6で構成された $V^{(B)}$ 内有界線型写像 $T^{\sim}: X^{\sim} \to Y^{\sim}$ を T の $V^{(B)}$ 内埋蔵と呼ぶ． Z-ノルム Z-加群と有界 Z-線型写像のなす圏を Z-norm で表す． Z-Kaplansky は Z-Norm の充満部分圏である．これまでに得た $V^{(B)}$ 内埋蔵の関手的性質をまとめると次のようになる．

定理3.7. $V^{(B)}$ 内埋蔵 $E: X \to X^{\sim}$, $E: T \to T^{\sim}$ は次の性質を持つ Z-Norm から $\mathrm{Norm}^{(B)}{}_{\infty}$ への関手である：すべての a, $b \in Z$, $T, S \in \mathrm{Hom}_Z(X,Y)$ 及び $X, Y \in$ Z-Norm に対して，

1) $E(aT + bS) = aE(T) + bE(S)$,

2) $\| E(T) \|_B = \| T \|_Z$.

また， 関手 E は $\mathrm{Norm}^{(B)}{}_{\infty}$ から Z-Norm への有界断面関手 $R: X \to X^{\sim}$, $R: T \to T^{\wedge}$ の左共役関手である．対応する Z-Norm 上の自然変換 $1 \to RE$ は $\{J_X \mid X \in \text{Z-Norm}\}$ で与えられる． 更に， 関手 E を圏 Z-Kaplansky に制限すれば， この共役対は二つの圏 Z-Kaplansky と $\mathrm{Norm}^{(B)}{}_{\infty}$ の間の圏同値を確立する．

この定理から，対応 $RE: X \to X^{\sim\wedge}$, $RE: T \to T^{\sim\wedge}$ は Z-Norm から Z-Kaplansky への関手で，$V^{(B)}$ 内埋蔵写像 J_X は X からこの関手 RE への普遍射であることがただちに判る．よって，次の系を得る．

系3.8. X を Z-ノルム Z-加群とする．Kaplansky Z-加群 $X^{\sim\wedge}$ は次の性質を持つ同距離同型をこめて唯一の Z-加群である：任意の Kaplansky Z-加群 Y に対して，各 $T \in \mathrm{Hom}_Z(X^{\sim\wedge}, Y)$ は $T = S \circ J_X$ を

充たす唯一つの $S \in Hom_Z(X,Y)$ から得られる．また，この対応 $S \to S \circ J_X$ によって，$Hom_Z(X,Y)$ は $Hom_Z(X^{\sim\wedge},Y)$ と同距離同型となる．

ノルム空間 X の単位球を UB(X) で表し，$V^{(B)}$ 内ノルム空間 X の単位球を $UB(X)_B$ で表すことにしよう．また，集合論を記述する言語に $V^{(B)}$ の各元を指示する定項を付け加えた言語を $L(V^{(B)})$ であらわす．次の定理は，単位球という概念が $V^{(B)}$ 内埋蔵によって変わらないことを示す．

定理3.9 X を Kaplansky Z-加群とし，$\phi(x)$ を $L(V^{(B)})$ の論理式とする．

(1) $[\![\forall x \in UB(X^{\sim})_B\ \phi(x)]\!] = 1$ が成り立つための必要十分条件はすべての $u \in UB(X)$ について $[\![\phi(u^{\sim})]\!] = 1$ が成り立つことである．

(2) $[\![\exists x \in UB(X^{\sim})_B\ \phi(x)]\!] = 1$ が成り立つための必要十分条件はある $u \in UB(X)$ について $[\![\phi(u^{\sim})]\!] = 1$ が成り立つことである．

§4．作用素環の加群構造

境 [13] によって， von Neumann 環をその Banach 空間の構造により特徴付けることに成功して以来，その前共役空間の構造は von Neumann 環の研究に欠かせない道具となった．しかし，Halpern [1] によって指摘されてもいるように，中心が自明でない場合には，この道具にもある限界が存することが認識されるようになった．このような場合に，彼は Banach 空間の代わりに中心上の加群の構造を調べることを提案した．実際，彼は von Neumann 環が I 型であるためにはそ

れが中心上のある Banach 加群の第二共役空間になることが必要十分であること [1]，また，AW^*-環がある I型 AW^*-環に中心の等しい第二可換子環として埋入されるためには，それが中心上のある Banach 加群の第二共役加群になることが必要十分であることを示した [2].

これらの結果はそれまで因子環と Banach 空間の関係として知られていたことの適切な一般化と考えられる．しかし，この研究方法はともすると Banach 空間論と全く平行的に Banach 加群の理論を構築するという極めて煩わしい仕事に陥る虞がある．従って，この目的のために類推によって概念構成を一歩ずつ進める代わりに，Banach 空間の定理を Banach 加群の定理に直接変換する論理学的方法があれば非常に望ましいことである．前節で，我々がしてきたことがちょうどそのような方法を提供しているのである．以下で，前節で得られた移行原理の応用として得られる作用素環の加群構造に関する結果をいくつか紹介しよう．

Z を可換 AW^*-環とし，A は Z を中心の単位的部分環として含む C^*-環とする．A は，あるノルム Z-加群の Z-共役加群と同距離同型のとき，<u>Z-共役的</u>と呼ばれる．また，あるノルム Z-加群の第二共役 Z-加群と同距離同型のとき <u>Z-第二共役的</u>と呼ばれる．A が A 自身の Z-共役加群と同距離同型のとき，<u>Z-自己共役的</u>と呼ばれる．我々の目的はこのような性質を用いて C^*-環のいくつかの性質を特徴付けることである．

C^*-環は，Z を中心とするある I 型 AW^*-環 L と *-同型 $\pi : A \to L$ が存在して $\pi(A) = \pi(A)''$ となるとき，Z-埋入可能と呼ばれる．このとき，A は Z を中心の単位的 AW^*-部分環として含む AW^*-環となる．また，すべての Z-埋入可能 AW^*-環はこの Z を中心とすることが出来ると言う意味で中心的埋入可能であることが Boole 代数値解析学により示されている [10]. 我々の道具の最初の応用は次の定理で

ある.

定理4.1. A を可換 AW^*-環 Z を中心の単位的部分環として含む C^*-環とする. このとき, A が Z-埋入可能であるための必要十分条件は, A が Z-共役的であることである.

この定理は, Z = C のとき, 境 [13] による von Neumann 環の特徴付けに帰着される. また, Z が A の中心であるときには Halpern [2] によって証明されている. この定理と前述の中心的埋入可能性に関する結果より容易に彼等の結果を内挿する次の系が得られる.

系4.2. Z_0-埋入可能 C^*-環は Z_0 を含む中心のすべての AW^*-部分環 Z に関して Z-埋入可能であり, かつZ-共役的である. 特に, von Neumann 環は中心のすべての von Neumann 部分環 Z に関して Z-埋入可能かつ Z-共役的である.

ところで, von Neumann 環の場合には, 前共役空間が Banach 空間の圏の中でただ一つに定まることが知られているが, 対応する Banach 加群の結果はこれまで全く知られていない. この問題が困難であった理由は Banach 加群の理論において前層と層の差異がこれまで顧みられなかったことにある. つまり, 本稿で定義した Kaplansky-Banach 加群が Banach 加群に対する役割がちょうど層が前層に対して果たす役割に対応している. これが前節で確立した圏同値の内容なのであり, Boole 値集合論を用いることによって初めて明らかになったことである. それでは, 以下の準備のもとでこの一意性の問題を解決しよう.

Z-埋入可能 C^*-環 A の Z-汎関数 f は, すべての $x \in A$ につ

いて， $f(x^*x) \geqq 0$ となるとき正値と呼ばれる．正値 Z-汎関数 f は， A の正元からなる任意の一様有界増加有向族 $\{a_i\}$ について， $f(\sup_i a_i) = \sup_i f(a_i)$ となるとき正規と呼ばれる．A 上の Z-汎関数で正規正値 Z-汎関数の線型結合として表せるものの全体を $A_\#$ で表す．

定理4.3. A を Z-埋入可能 C^*-環とすれば， $A_\#$ は Kaplansky-Banach Z-加群であり，A は $A_\#$ の Z-共役加群である．もし A が他の Kaplansky Z-加群 X の Z-共役加群だとすれば，X は $A_\#$ に同距離同型である．

最後に， I 型 AW^*-環の特徴付けについて次の諸結果が得られる．

定理4.4. AW^*-環が I 型であるための必要十分条件は，それがその中心 Z に関して Z-第二共役的であることである．

定理4.5. AW^*-環が I 有限型であるための必要十分条件は，それが自己共役的であることである．

References.

[1] H. Halpern, Module homomorphisms of a von Neumann algebra into its center, Trans. Amer. Math. Soc. 140(1969), 183-193.

[2] H. Halpern, Embedding as a double commutator in a type I AW^*-algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 148(1970), 85-98.

[3] T. Jech, Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing, Trans. Amer. Math. Soc. 289(1985), 133-162.

[4] H. Nishimura, An approach to the dimension theory of continuous geometry from the standpoint of Boolean valued analysis, to appear in Publ. RIMS.

[5] H. Nishimura, Some applications of Boolean valued set theory to abstract harmonic analysis on locally compact groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21(1985), 181-190.

[6] M. Ozawa, Boolean valued interpretation of Hilbert space theory, J. Math. Soc. Japan 35(1983), 609-627.

[7] M. Ozawa, Boolean valued analysis and type I AW*-algebras, Proc. Japan Acad. 59A(1983), 368-371.

[8] M. Ozawa, A classification of type I AW*-algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 589-608.

[9] M. Ozawa, Nonuniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 93(1985), 681-684.

[10] M. Ozawa, A transfer principle from von Neumann algebras to AW*-algebras, J. London Math. Soc. (2) 32(1985) 141-148.

[11] M. Ozawa, Boolean valued analysis approach to the trace problem of AW*-algebras, to appear in J. London Math. Soc.

[12] M. Ozawa, Boolean valued interpretaion of Banach sapce theory and module structures of von Neumann algebras, Preprint Ser. (1985) No. 12, Dept. Math., Coll. Gen. Ed.,

Nagoya University.

[13] S. Sakai, A characterization of W^*-algebras, Pacific J. Math. 6(1956), 763-773.

[14] G. Takeuti, "Two Applications of Logic to Mathematics", Princeton University Press, Princeton, 1978.

[15] G. Takeuti, Boolean valued analysis, in "Applications of Sheaves", (ed. Fourman, Mulvey and Scott), Lecture Notes in Math., 753, 714-731, Springer, Berlin, 1979.

[16] G. Takeuti, A transfer principle in harmonic analysis, J. Symbolic Logic 44(1979), 417-440.

[17] G. Takeuti, Boolean completion and m-convergence, in "Categorical Aspects of Topology and Analysis", (ed. Banaschewski), Lecture Notes in Math. 915, 333-350, Springer, Berlin, 1982.

[18] G. Takeuti, Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan 35(1983), 1-21.

[19] G. Takeuti, C^*-algebras and Boolean valued analysis, Japan J. Math. 9(1983), 207-245.